Отношения порядка

В предыдущем разделе мы увидели, как на основе обычного отношения равенства между числами возникает понятие эквивалентности элементов произвольного множества. Точно так же числовые неравенства могут служить основой для построения более широкого класса отношений порядка.

Определение 1.46. Отношение ρ на X называется *предпорядком* (*квазипорядком*), если оно рефлексивно и транзитивно.

Определение 1.47. Отношение ρ на X называется порядком, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Пример 1.47. На множестве $Z\backslash\{0\}$ введем отношение $x\rho y$, если число y является делителем числа x:

$\rho = \{(x, y) \,|\quad x = ky, \quad k \in Z\backslash\{0\}\}$.

Это отношение рефлексивно ($x = 1 \cdot x$) и транзитивно (если $x = k_1 y$ и $y = k_2 z$, то $x = k_1 k_2 z = nz$). Однако ρ не является симметричным: например, число 3 является делителем числа 6, но число 6 не является делителем 3. Одновременно ρ не является и антисимметричным, поскольку $-3 = (-1) \cdot 3$ и $3 = (-1) \cdot (-3)$, но, конечно, $3 \neq -3$. Таким образом, указанное отношение делимости является предпорядком.

Порядок называется линейным (или полным), если для любых двух элементов $x, y \in X$ выполняется хотя бы одно их двух требований: $x\rho y$ или $y\rho x$. В противном случае, когда существует какая-то пара *несравнимых* между собой элементов (т.е. обе пары (x, y) и (y, x) не принадлежат ρ), порядок называется *частичным*.

Определение 1.48. Отношение ρ на X называется строгим порядком, если оно транзитивно и сильно антисимметрично.

Пример 1.48. Отношение $\leq$ на множестве действительных чисел R является линейным порядком.

Пример 1.49. Отношение $<$ на R является строгим линейным порядком.

Пример 1.50. Отношение подчиненности на предприятии задает частичный строгий порядок. Несравнимыми по такому отношению являются сотрудники различных отделов.

Пример 1.51. Отношение вложения на булеане $\mathfrak{B}(X)$ множества X является частичным порядком. Пусть A, B и C — произвольные подмножества X. Тогда $A \subset A$ (рефлексивность); если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$ (антисимметричность); и если $A \subset B$, $B \subset C$, то $A \subset C$ (транзитивность). Указанный порядок частичный, так как не все элементы булеана сравнимы между собой. Например, не сравнимы по отношению вложения подмножества $A = \{1, 2\}$ и $B = \{2, 3\}$ множества $X = \{1, 2, 3\}$.

Непустое множество X с заданным на этом множестве отношением частичного (линейного) порядка называется частично (линейно) упорядоченным множеством. Для отношения порядка на произвольном множестве часто используют символ $\preceq$, соответственно для строгого порядка можно использовать символ $\prec$.

Пусть X есть линейно упорядоченное множество.

Определение 1.49. Элемент $y \in X$ *накрывает* элемент $x \in X$, если $x \prec y$ и не существует элемента $z \in X$ такого, что $x \prec z \prec y$.

Если Card$X{<}\infty$, элементы x и y сравнимы тогда и только тогда, когда существует последовательность элементов $x = x_1,\ x_2, \dots x_i, x_{i+1}, \dots, x_n = y$, в которой элемент x_{i+1} накрывает элемент x_i.

Любое упорядоченное множество можно представить в виде *понижающей диаграммы* (диаграммы), в которой каждый элемент множества изображается точкой на плоскости, причем, если y накрывает x, то точку y располагают выше точки x и соединяют обе точки отрезком.

Пример 1.53. На множестве X всех натуральных делителей числа 24 зададим отношение порядка следующим образом: $x \prec y$, если x является делителем y и $x \neq y$.

Среди отношений порядка отдельно выделяют некоторые специальные отношения.

Пусть ρ есть частичный порядок на X. На элементах прямого произведения зададим новое отношение $(x, y) \preceq (z, t)$ в том и только в том случае, если $x\rho z$ и $y\rho t$. Нетрудно проверить, что заданное отношение $\preceq$ является отношением частичного порядка. Оно называется отношением Парето.